

Chers futurs étudiants d'ECG1,

Nous vous demandons, d'ici la rentrée, de bien apprendre le cours ci-joint (ce sont des révisions) et de vous entraîner en faisant les exercices proposés.

Bonnes vacances et à bientôt.

Mme Bled, Mme Mayrand, enseignants de mathématiques en ECG1 à Kerichen

RÉVISIONS

1 Les ensembles de nombres

Définition 1

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des **entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des **entiers relatifs**. Il est constitué des entiers naturels ainsi que de leurs opposés : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des **nombres rationnels** : les nombres rationnels sont tous les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif, et b un entier naturel non nul.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Remarque :

Le nombre $\frac{2}{30}$ est un nombre rationnel, il est aussi égal à $\frac{1}{15}$ (l'écriture n'est pas unique).

$\frac{19}{-2}$ est un nombre rationnel car il s'écrit : $\frac{-19}{2}$

2 Fractions

Soit a et b deux réels.

$\frac{a}{b}$ est défini si et seulement si $b \neq 0$	$\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0$
--	------------------------------

Soit a, b, c, d des réels.

Pour $c \neq 0$: $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \times b$	pour $b \neq 0$ et $d \neq 0$: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
--	--

Pour $c \neq 0$: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$b \neq 0$ et $d \neq 0$: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	pour $b \neq 0$: $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$
---	---	--

Pour $a \neq 0$: $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$	pour $b \neq 0$ et $c \neq 0$: $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$	pour $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
---	---	--

3 Identités remarquables

Forme développée	Forme factorisée
$a^2 + 2ab + b^2$	$(a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	$(a - b)^2$
$a^2 - b^2$	$(a + b)(a - b)$

4 Fonctions trinôme

4.1 Factorisation

Théorème 1

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

1) Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 avec

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

De plus, pour tout réel x on a la factorisation suivante :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

2) Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x admet une seule solution x_0 avec

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

De plus, pour tout réel x on a la factorisation suivante :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

3) Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x n'admet pas de solution réelle.

4.2 Signe

On reprend les notations du théorème précédent, et on s'intéresse au signe de $ax^2 + bx + c$, avec x un réel.

- 1) Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec x_1 et x_2 les nombres réels définis au théorème précédent. Il suffit de faire un tableau de signes pour $a(x - x_1)(x - x_2)$. Par exemple, pour $a > 0$, cela donne : (en supposant que $x_1 < x_2$).

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
ax^2+bx+c	$+$	0	$-$	0	$+$

On peut dire que $ax^2 + bx + c$ est du signe de $-a$ entre les racines x_1 et x_2 , et du signe de a ailleurs.

2) Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où x_0 est le nombre réel $-\frac{b}{2a}$.

- Pour $a > 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	+	0	+

- Pour $a < 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	-	0	-

3) Si $\Delta < 0$, quelle que soit la valeur du réel x , $ax^2 + bx + c$ garde le même signe, celui de a .

5 Exercices

5.1 Factoriser/développer

Exercice 1 Factoriser l'expression $f(x)$ suivante.

1. $f(x) = (7x - 1)(4x + x^2) - x(7x - 1)$
2. $f(x) = (2x - 1)^3 - 2x + 1$
3. $f(x) = (x + 3)(x^2 - 4) - (x^2 + 4x + 4)(x - 2)$

Exercice 2 Factoriser l'expression $f(x)$ suivante.

1. $f(x) = -(6x + 7)(6x - 1) + 36x^2 - 49$
2. $f(x) = 25 - (10x + 3)^2$
3. $f(x) = (-9x - 8)(8x + 8) + 64x^2 - 64$

Exercice 3 Développer, réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de x , l'expression $f(x)$ suivante :

1. $f(x) = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$
2. $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)(x^2 - x + 1)$
3. $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
4. $f(x) = (x - 2)^2(-x^2 + 3x - 1) - (2x - 1)(x^3 + 2)$
5. $f(x) = (x^2 + x + 1)^2$
6. $f(x) = (2x + 3)(5x - 8) - (2x - 4)(5x - 1)$

5.2 Fractions

Exercice 4 On suppose que l'expression $f(x)$ suivante est bien définie. Écrire $f(x)$ sous la forme d'une seule fraction, la plus simple possible.

1. $f(x) = 2 + \frac{3}{x+2}$
2. $f(x) = \frac{2x}{1-x} - \frac{3+x}{4x}$
3. $f(x) = \frac{1-x^2}{(x-1)(2-x)}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

$$5. f(x) = \frac{4x^2 - 8x + 4}{(x-1)(4x+12)}$$

$$6. f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+5}$$

$$7. f(x) = \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x-3}$$

$$8. f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)} - \frac{3}{x+1}$$

$$9. f(x) = \frac{2x}{x^2 - 2x - 3} - \frac{1}{x-3}$$

$$10. f(x) = \frac{x+1}{x+1 + \frac{1}{x+1}}$$

Exercice 5

Simplifier au maximum :

$$1. A = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$$

$$3. C = \frac{3}{\frac{4}{2}}$$

$$5. F = \frac{3}{4} \times \frac{-16}{21}$$

$$2. B = \frac{\frac{3}{4}}{2}$$

$$4. D = \frac{1}{2 + \frac{3}{2}}$$

$$6. G = \frac{7}{8} \times \frac{2}{3}$$

$$7. H = \frac{3}{4} - \frac{11}{10}$$

Exercice 6

Simplifier au maximum :

$$1. A = \frac{1}{36} - \frac{1}{45} + \frac{1}{9}$$

$$4. D = \frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12}$$

$$8. \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (a \text{ et } b \text{ non nuls, } a \neq b)$$

$$2. B = \frac{1}{\frac{63}{40} \times \frac{16}{27}}$$

$$5. F = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) \left(\frac{9}{4} + \frac{21}{6}\right)$$

$$6. G = \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$$

$$9. 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} \quad (a \neq -1).$$

$$3. C = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{4}{3}}$$

$$7. H = \frac{-\frac{2}{15}}{-\frac{6}{5}}$$

Exercice 7 On suppose que les expressions suivantes sont bien définies. Écrire sous la forme d'une seule fraction, la plus simple possible.

$$1. f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$$

$$2. A = \frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^3}{a-b}$$

$$3. g(x) = \frac{\frac{6(x+1)}{x(x-1)(2x-2)}}{\frac{2x+2}{x^2(x-1)^2}}$$

Exercice 8

On suppose que les expressions suivantes sont bien définies. Écrire sous la forme d'une seule fraction, la plus simple possible.

$$1. f(x) = \frac{x}{5} + \frac{1}{x}$$

$$2. f(x) = \frac{1}{9} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$3. f(x) = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)} - \frac{2}{x}$$

$$4. f(x) = \frac{x-3}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{(x-1)(x-2)}$$

$$5. \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$6. 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}$$

$$7. \frac{ac - bc}{2cb - 2ac}$$

$$8. \frac{1 - x^2}{(x-1)^4}$$

$$9. \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1+x}{x}}$$

5.3 Trinômes

Exercice 9

Factoriser les trinômes du second degré suivants :

1. $P(x) = 9x^2 - 12x + 4$

3. $R(x) = 3x^2 + 7x + 1$

5. $U(x) = 2x^2 + 3x - 9$

2. $Q(x) = x^2 + 3x + 2$

4. $T(x) = -5x^2 + 6x - 1$

6. $V(x) = -5x^2 + 9x + 2$

6 Réponses

Exercice 1

1. $f(x) = (7x - 1)(3x + x^2)$

3. $f(x) = (x - 2)(x + 2)$

2. $f(x) = 4x(x - 1)(2x - 1)$

Exercice 2

1. $f(x) = -6(6x + 7)$

3. $f(x) = -8(x + 1)(x + 16)$

2. $f(x) = 4(5x + 4)(-5x + 1)$

Exercice 3

1. $f(x) = 8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$

4. $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 17x^2 + 12x - 2$

2. $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1$

5. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

3. $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

6. $f(x) = 21x - 28$

Exercice 4

1. $f(x) = \frac{2x + 7}{x + 2}$

6. $f(x) = \frac{3 - x}{(x + 1)(x + 5)}$

2. $f(x) = \frac{9x^2 + 2x - 3}{4x(1 - x)}$

7. $f(x) = -\frac{x + 2}{(2x - 1)(x - 3)}$

3. $f(x) = \frac{1 + x}{x - 2}$

8. $f(x) = \frac{-3x + 4}{(x + 1)(x - 1)}$

4. $f(x) = \frac{x + 4}{(x - 2)x(x + 1)(x + 2)}$

9. $f(x) = \frac{x - 1}{(x - 3)(x + 1)}$

5. $f(x) = \frac{x - 1}{x + 3}$

10. $f(x) = \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)^2 + 1}$

Exercise 5

$$\begin{aligned} 1. \quad A &= \frac{1}{2} \\ 2. \quad B &= \frac{3}{8} \\ 3. \quad C &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad D &= \frac{2}{7} \\ 5. \quad F &= -\frac{4}{7} \\ 6. \quad G &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$7. \quad H = -\frac{7}{20}$$

Exercise 6

$$\begin{aligned} 1. \quad A &= \frac{7}{60} \\ 2. \quad B &= \frac{15}{14} \\ 3. \quad C &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad D &= \frac{13}{30} \\ 5. \quad F &= \frac{23}{16} \\ 6. \quad G &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad H &= \frac{1}{9} \\ 8. \quad \frac{a+b}{b-a} \\ 9. \quad \frac{2a+1}{a+1} \end{aligned}$$

Exercise 7

$$1. \quad f(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$$

$$2. \quad A = -\frac{ab}{a-b}$$

$$3. \quad g(x) = \frac{3}{2}x$$

Exercise 8

$$1. \quad f(x) = \frac{x^2 + 5}{5x}$$

$$2. \quad f(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{9(x-2)^2}$$

$$3. \quad f(x) = \frac{x-1}{(x+1)x}$$

$$4. \quad f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x-2)}$$

$$5. \quad \frac{bc + ac + ab}{abc}$$

$$6. \quad \frac{8}{5}$$

$$7. \quad -1$$

$$8. \quad -\frac{1+x}{(x-1)^3}$$

$$9. \quad -\frac{1}{x(x+1)^2}$$

Exercise 9

$$1. \quad P(x) = (3x-2)^2$$

$$2. \quad Q(x) = (x+1)(x+2)$$

$$3. \quad R(x) = 3 \left(x + \frac{7-\sqrt{37}}{6} \right) \left(x + \frac{7+\sqrt{37}}{6} \right)$$

$$4. \quad T(x) = -5(x-1) \left(x - \frac{1}{5} \right)$$

$$5. \quad U(x) = 2 \left(x - \frac{3}{2} \right) (x+3)$$

$$6. \quad V(x) = -5 \left(x + \frac{1}{5} \right) (x-2)$$